

OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA
11 FEBRUARIE 2012

Clasa a X-a, mate-info

1. a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația:

$$2^{2^{x+2}} + 2^{2^{-x}} = 8$$

- b) Dacă $x, y, z \in (1, \infty)$ arătați că

$$\log_{\frac{1}{x}} \frac{2}{y+z} \cdot \log_{\frac{1}{y}} \frac{2}{x+z} \cdot \log_{\frac{1}{z}} \frac{2}{x+y} \geq 1$$

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 = z_3$.

Calculați $z_1^{2012} + z_2^{2012} + z_3^{2012}$

3. Arătați că $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ are loc egalitatea

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq \frac{1 + \cos^2 x}{|\cos x|}$$

4. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x+y) = f(\ln(xy)), \forall x, y > 0.$$

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp efectiv de lucru-3 ore.
- Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.